



Propiedad 1

Dos números distintos tienen logaritmos distintos. Es decir:

Si $P \neq Q$, entonces $\log_a P \neq \log_a Q$.

Además, si $a > 1$ y $P < Q$, $\log_a P < \log_a Q$.

Demostración

Hacemos:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a P = p \longrightarrow P = a^p \\ \log_a Q = q \longrightarrow Q = a^q \end{array} \right\} \text{ Si } P \neq Q \rightarrow a^p \neq a^q \rightarrow p \neq q \rightarrow \log_a P \neq \log_a Q$$

Si tenemos en cuenta que la función $y = \log_a x$ es creciente para $a > 1$, es obvia tanto esta propiedad como la siguiente:

$$\text{Si } P < Q \rightarrow \log_a P < \log_a Q$$

Propiedad 4

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

Indicación:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a P = p \longrightarrow P = a^p \\ \log_a Q = q \longrightarrow Q = a^q \end{array} \right\} \Rightarrow P \cdot Q = a^{p+q}$$

Toma logaritmos de base a en esta igualdad y sustituye p y q . ♦

Demostración

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a a^{p+q} \rightarrow \log_a (P \cdot Q) = p + q \rightarrow \log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

Propiedad 5

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$$

Demostración

Hacemos:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a P = p \rightarrow P = a^p \\ \log_a Q = q \rightarrow Q = a^q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dividiendo} \rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ \log_a \frac{P}{Q} = \log_a a^{p-q} \rightarrow \log_a \frac{P}{Q} = p - q \rightarrow \log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q \end{array}$$



Propiedad 6

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base:

$$\log_a P^n = n \cdot \log_a P$$

Indicación

Haz $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$, eleva a n los dos miembros de la igualdad y toma \log_a ♦

Demostración

Hacemos: $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$

Elevando a n :

$$a^{np} = P^n \rightarrow \log_a a^{np} = \log_a P^n$$

$$np = \log_a P^n \rightarrow n \log_a P = \log_a P^n \rightarrow \log_a P^n = n \log_a P$$

Propiedad 7

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$$

Indicación

Recuerda que $\sqrt[n]{P} = P^{1/n}$ y repite el mismo proceso que en la propiedad anterior. ♦

Demostración

$$\text{Hacemos: } \log_a \sqrt[n]{P} = \log_a P^{1/n} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n} \log_a P = \frac{\log_a P}{n}$$

(*) Propiedad anterior.

Propiedad 8

$$\log_a P = \frac{\log P}{\log a} \quad \text{Recuerda: } \log P = \log_{10} P$$

Indicación

Haz $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$. Toma logaritmos decimales y luego despeja p . ♦

Demostración

$$a^p = P \rightarrow \log a^p = \log P \rightarrow p \log a = \log P \rightarrow p = \frac{\log P}{\log a}$$

$$\text{Así, } \log_a P = \frac{\log P}{\log a}.$$